Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 17 - 4/11

1 Función de Green

Sin ánimo de resultar re-iterativos, vamos a repasar los últimos detalles del método de iteraciones monótonas. Específicamente, para el problema de Dirichlet

$$-u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

vimos que si α y β son una sub y una supersolución ordenadas, entonces tomando $\lambda \geq 0$ tal que

$$\lambda \geq -\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)$$

para $(t, u) \in C := \{t \in [0, T], \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$ las sucesiones definidas por $u_0 := \alpha$, $v_0 := \beta$ y

$$-u''_{n+1}(t) + \lambda u_{n+1}(t) = f(t, u_n(t)) + \lambda u_n(t),$$

$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(T) = 0,$$

$$-v''_{n+1}(t) + \lambda v_{n+1}(t) = f(t, v_n(t)) + \lambda v_n(t),$$

$$v_{n+1}(0) = v_{n+1}(T) = 0$$

convergen a soluciones. En realidad, lo que se deduce a partir del principio del máximo y la elección de λ es que $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son monótonas y acotadas; para probar que los límites puntuales son soluciones, se puede argumentar de forma directa o bien, para usar el teorema abstracto, demostrar que el operador $T_\lambda(u) := (L+\lambda I)^{-1}(N+\lambda I)(u)$ es compacto. La forma directa es similar a la que vimos en el ejemplo de la clase pasada y queda como ejercicio; la compacidad, a esta altura de la soirée, también debería resultarnos pan comido (aunque, hay que decirlo, el pan muy compacto puede caer pesado). Salvo que estemos lidiando con ecuaciones más generales, en esta clase de problemas suele ocurrir que alcanza con probar que la inversa del operador $L + \lambda I$ es compacta, porque $N + \lambda I$ manda conjuntos acotados en conjuntos acotados. En otras palabras, alcanza con probar:

$$\{\varphi_n\} \text{ acotada } \Longrightarrow \{u_n\} \text{ tiene alguna subsucesión convergente}$$

donde $\{u_n\}$ es la única que verifica

$$-u_n'' + \lambda u_n = \varphi_n, \qquad u_n(0) = u_n(T) = 0.$$

Y aquí nos vienen muy bien las cotas que supimos conseguir. Por si supimos, pero no nos acordamos, podemos volver a hacer la cuenta: multiplicando por u_n e integrando se obtiene

$$\int_0^T u_n'(t)^2\,dt + \lambda \int_0^T u_n(t)^2\,dt = \int_0^T \varphi_n(t) u_n(t)\,dt,$$

de donde sale usando Poincaré

$$\|u_n'\|_{L^2}^2 \le \|\varphi_n\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2} \le \frac{T}{\pi} \|u_n'\|_{L^2}.$$

Esto dice que $\|u_n'\|_{L^2}$ se mantiene acotada y, en consecuencia, también $\|u_n\|_\infty$, lo que nos deja en una situación inmejorable para aplicar Arzelà-Ascoli. Pero no es mala idea verlo también a partir de la función de Green, que permite representar las soluciones del problema anterior en la forma

$$u_n(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi_n(s)\,ds.$$

La compacidad de esta clase de operadores es bien conocida, otra vez por Arzelà-Ascoli; en rigor, esta G resulta Lipschitz así que se prueba algo más fuerte que la equicontinuidad. Si no sonara tan mal, la palabra adecuada sería *equi-lipschitzianidad*:

$$|u_n(t_1) - u_n(t_0)| \le \int_0^T |G(t_1,s) - G(t_0,s)|\,|\varphi_n(s)|\,ds \le c|t_1 - t_0|$$

para cierta c independiente de n. Por ejemplo, los que se entusiasmaron la clase pasada con Dini, con esto podrían probar de manera directa que los límites puntuales u y v de las iteraciones monótonas son funciones continuas, antes de saber que son soluciones: por ejemplo para la primera, si escribimos

$$u_{n+1}(t) = \int_0^T G(t,s)[f(t,u_n(t)) + \lambda u_n(t)]\,ds$$

entonces, como antes, $|u_{n+1}(t_1) - u_{n+1}(t_0)| \le c|t_1 - t_0|$ y luego $|u(t_1) - u(t_0)| \le c|t_1 - t_0|$.

La función de Green tiene además, otra ventaja: es es la misma a lo largo de toda la iteración; de esta forma, podemos calcularla una vez que establecemos el valor de λ y eso ya nos da la expresión integral recursiva para los términos de la sucesión. Después de hacerle tanta publicidad (los más veteranos podrán evocar aquí a ese vendedor que era "un león vendiendo Durax"), no nos queda más remedio que hacer la cuenta para ver qué pinta tiene. Para esto, vamos a comportarnos como verdaderos leones calculando funciones de Green: en primer lugar, recordemos que la solución general del problema lineal

$$-u''(t) + \lambda u(t) = \varphi(t)$$

es de la forma

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t),$$

donde $\{u_1, u_2\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea y los coeficientes se obtienen por variación de parámetros:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Cabe observar que el determinante W de la matriz fundamental (el famoso wronskiano) es constante, pues $(u_1u_2' - u_1'u_2)' = u_1u_2'' - u_1''u_2 = \lambda(u_1u_2 - u_1u_2)$. Así que las cuentas se vuelven sencillas:

$$c_1(t) = \gamma_1 + \frac{1}{W}\int_0^t u_2(s)\varphi(s)\,ds, \qquad c_1(t) = \gamma_2 - \frac{1}{W}\int_0^t u_1(s)\varphi(s)\,ds.$$

Ahora recordemos que nuestro objetivo era encontrar u tal que $u(0) = u(T) = 0$, lo que determinaría un sistema lineal para determinar las constantes γ_1 y γ_2. Pero esto se puede hacer de forma astuta, demostrando de paso eso que dijimos tantas veces: "mono $\Longrightarrow$ epi". En efecto, la cuenta vale para cualquier λ tal que el problema de Dirichlet para el problema $-u'' + \lambda u = 0$ no tenga soluciones no triviales. En ese caso, si elegimos $u_1 \neq 0$ tal que $u_1(0) = 0$, obtenemos

$$0 = u(0) = c_2(0)u_2(0) = \gamma_2 u_2(0)$$

y, del mismo modo, si ahora fijamos $u_2 \neq 0$ tal que $u_2(T) = 0$ resulta

$$0 = u(T) = c_1(T)u_1(T) = \left(\gamma_1 + \frac{1}{W}\int_0^T u_2(s)\varphi(s)\,ds\right)u_1(T).$$

La hipótesis nos dice, justamente, que $u_2(0) \neq 0$ y $u_1(T) \neq 0$, de donde $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 = -\frac{1}{W}\int_0^T u_2(s)\varphi(s)\,ds$, lo que da una coqueta fórmula para u:

$$u(t) = -\frac{1}{W}\int_t^T u_2(s)\varphi(s)\,ds\,u_1(t) - \frac{1}{W}\int_0^t u_1(s)\varphi(s)\,ds\,u_2(t).$$

Para obtener a partir de esto la (claramente única) función de Green, no queda más que recurrir a las siempre serviciales funciones características:

$$u(t) = -\frac{1}{W}\int_0^T [u_1(t)u_2(s)\chi_{[t,T]}(s) + u_1(s)u_2(t)\chi_{[0,t]}(s)]\varphi(s)\,ds.$$

Esta expresión parece un bodrio, pero no hay que dejarse llevar por las apariencias:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{u_1(s)u_2(t)}{W} & t \geq s \\ \\ -\frac{u_1(t)u_2(s)}{W} & t < s. \end{cases}$$

No es casualidad que G haya salido así de simétrica, ya que el operador $-u''+\lambda u$ es autoadjunto para las condiciones de Dirichlet. Pero, más allá de deleitarnos con las propiedades de G podemos usar lo anterior para calcularla sin más vueltas. Por ejemplo, para $\lambda > 0$ las soluciones son combinaciones de $e^{\sqrt{\lambda}t}$ y $e^{-\sqrt{\lambda}t}$, así que podemos elegir

$$u_1(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}t), \qquad u_2(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}(T-t))$$

lo que determina wronskiano bastante afable: $W = -\sqrt{\lambda}\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}T)$. En cambio, si se nos hubiera ocurrido poner $\lambda < 0$ entonces habría que andar con cuidado para no pisotear un autovalor: hay que pedir $\lambda \neq -\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$ y se puede tomar

$$u_1(t) = \operatorname{sen}(rt), \qquad u_2(t) = \operatorname{sen}(r(T-t))$$

donde $r = \sqrt{-\lambda}$, es decir:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(rs)\operatorname{sen}(r(T-t))}{r\operatorname{sen}(rT)} & t \geq s \\ \\ \frac{\operatorname{sen}(rt)\operatorname{sen}(r(T-s))}{r\operatorname{sen}(rT)} & t < s. \end{cases}$$

El caso $\lambda = 0$ es el más fácil y queda como ejercicio. Pero más allá del cúmulo de cuentas y senos hiperbólicos, es inmediato comprobar que en el caso $\lambda > 0$ vale $G(t,s) \geq 0$ (estrictamente, salvo sobre el borde del cuadrado): esto es claro y, de hecho, equivale al principio del máximo cuando u se cumple la condición de Dirichlet. Por un lado, si ya sabemos que $G \geq 0$ se obtiene

$$-u'' + \lambda u = \varphi \geq 0 \Longrightarrow u(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi(s)\,ds \geq 0$$

y, recíprocamente, sabiendo que vale el principio del máximo, si $G < 0$ en algún abierto A podemos tomar $\varphi \gneq 0$ con soporte en A y la integral es una herida absurda. Notemos que para el caso $\lambda < 0$ en realidad G sigue siendo positiva mientras $rT < \pi$; es decir: el principio del máximo vale para para $\lambda > -\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$, tal como dijimos la clase pasada.

Para el problema periódico, la situación es parecida. El principio del máximo vale para $\lambda > 0$, así que no hay problema para desarrollar el método de iteraciones monótonas cuando tenemos $\alpha \leq \beta$, exactamente igual que para Dirichlet. Sin embargo, aparece una novedad cuando nos situamos un poquito a la izquierda de 0 que -dicho sea de paso- es el primer autovalor: el operador $-u''+\lambda u$ resulta misteriosamente decreciente. No es fácil observar este fenómeno de manera directa; para demostrarlo hay que tomarse el trabajito de calcular la correspondiente función de Green, que ahora tiene un aspecto algo más complicado. Nuevamente, conviene escribir $r = \sqrt{-\lambda}$ y entonces se puede verificar que

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(r(s-t)) - \operatorname{sen}(r(T+s-t))}{2r[1-\cos(rT)]} & t \geq s \\ \\ \frac{\operatorname{sen}(r(t-s)) - \operatorname{sen}(r(T+t-s))}{2r[1-\cos(rT)]} & t < s. \end{cases}$$

Es claro entonces que si $rT \leq \pi$ entonces vale $G(t,s) \leq 0$, es decir:

Proposición 1.1 *(Principio del anti-máximo) Sea u una función T periódica tal que $-u'' + \lambda u \geq 0$ con $-\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \leq \lambda < 0$. Entonces $u \leq 0$.*

Esto permite mostrar un resultado de existencia de soluciones periódicas en presencia de una sub y una supersolución en orden inverso:

Proposición 1.2 *Sean $\alpha \geq \beta$ una sub y una supersolución periódicas del problema $-u''(t) = f(t, u(t))$. Sea $C = \{(t,u) : t \in [0,T], \alpha(t) \geq u \geq \beta(t)\}$ y supongamos que $\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ para $(t,u) \in C$, entonces el problema tiene al menos una solución u tal que $\alpha \geq u \geq \beta$.*

2 Alguien me ha contado que estás floreciente

El método de super y subsoluciones tiene aplicaciones de lo más variadas y se puede extender a otros contextos. Por ejemplo, a problemas en intervalos no acotados. Supongamos que queremos resolver el problema

$$-u''(t) = f(t, u(t))$$

pero ahora tenemos una condición de Dirichlet "en infinito", del estilo

$$\lim_{|t|\to\infty} u(t) = 0.$$

Es fácil buscar ejemplos para los cuales la cosa se puede complicar bastante, ya que la pérdida de compacidad puede ser un asunto delicado. Sin embargo, en presencia de super y subsoluciones la situación mejora. Supongamos que tenemos funciones suaves $\alpha \leq \beta$ tales que $-\alpha''(t) \leq f(t, \alpha(t))$ y $-\beta''(t) \geq f(t, \beta(t))$. La idea va a ser encontrar una solución entre α y β, haciendo lo que ya sabemos: resolver la ecuación en intervalos acotados de la forma $[-N, N]$. El asunto es que, para poder extraer de allí una sucesión que converja a una solución, la única manera de garantizar la condición en $\pm\infty$ es pidiendo que α y β aplasten todo lo que queda entre ellas, es decir, pedimos

$$\lim_{|t|\to\infty} \alpha(t) = \lim_{|t|\to\infty} \beta(t) = 0.$$

Entonces podemos hacer lo siguiente, en busca de la compacidad perdida: para cada N, resolvemos el problema en $[-N, N]$ con condición de Dirichlet... ¿cuál? Mal que nos pese, no podemos poner 0 porque necesitamos que los datos de borde caigan entre α y β, así que por esta vez asumiremos una condición no homogénea que segurísimo está entre α y β:

$$u(-N) = \frac{\alpha(-N) + \beta(-N)}{2}, \qquad u(N) = \frac{\alpha(N) + \beta(N)}{2}.$$

¡Gran cosa! El método de super y subsoluciones nos asegura entonces que hay una solución u_N entre α y β aunque -¡cuándo no!- aparece otra dificultad: las soluciones para intervalos distintos no tienen por qué pegarse bien. En principio, uno pensaría que es porque no son necesariamente únicas pero, aunque lo fueran, están definidas para intervalos y condiciones de borde diferentes. Pero cuando estamos a punto de decir "andando solo y sin vento, todo todo se acabó" llega la idea salvadora. Empecemos por el intervalo $I_1 := [-1, 1]$ y veamos lo que ocurre con la sucesión $\{u_N|_{I_1}\}$. Claramente, todos los elementos satisfacen la ecuación en I_1 y, aunque no tenemos mayor idea de los valores que toman en el borde, sabemos al menos que $\alpha \leq u_N \leq \beta$. Esto quiere decir que la sucesión es uniformemente acotada y, además, vale

$$|u_N''(t)| = |f(t, u_N(t))| \leq c_1 \qquad t \in I_1.$$

Conviene prestar atención aquí a un detalle: pusimos c_1, una constante que depende de I_1. Uno podría preguntar si no se puede fijar ya de una vez una única c, siendo que α y β están acotadas en toda la recta. Sin embargo, nada nos asegura que f esté acotada respecto de t. De todas formas, esta c_1 intervalo-dependiente nos alcanza para decir que $\{u_N|_{I_1}\}$ tiene alguna subsucesión que converge (estos muchachos Arzelà y Ascoli, siempre tan serviciales): por ejemplo, si tomamos la recta φ_N que une los puntos $(-1, u_N(-1))$ y $(1, u_N(1))$ entonces por valor medio resulta

$$|u_N'(t) - \varphi_N'(t)| \leq 2c_1.$$

Pero la pendiente de φ_N es $\frac{u_N(1)-u_N(-1)}{2}$, cuyo módulo es menor o igual (por poner una exageración) que el máximo entre $\|\alpha\|_\infty$ y $\|\beta\|_\infty$. En definitiva, se deduce que $\{u_N'\}$ está uniformemente acotada en I_1, lo que implica que el conjunto $\{u_N\}$ es equicontinuo. En resumen, existe una subsucesión $\{u_{N_j}\}$ que converge uniformemente en I_1 a cierta función u^1, con tanta buena suerte que además u^1 es allí solución de la ecuación. Esto, claro, queda como ejercicio: si uno quiere hacerse la vida aún más sencilla de lo que es, haciendo un doblete de Arzelá-Ascoli se puede suponer ya que las derivadas también convergen de manera uniforme, pues el conjunto $\{u_N''\}$ es equicontinuo.

Y ahora viene la parte interesante donde, como anticipa el título de la sección, un juego de calles se da en diagonal. Se trata, precisamente, de aquel método inventado por el Cantor de Buenos Aires (en realidad, nació en San Petersburgo): si restringimos ahora los términos de esa subsucesión al intervalo $I_2 := [-2, 2]$ (con $N \geq 2$, obviamente), entonces podemos extraer una nueva subsucesión que converge a una función u^2, que es solución del problema en I_2 y además $u^2|_{I_1} = u^1$. Así sucesivamente, obtenemos soluciones u^N definidas en $I_N := [-N, N]$ que se pegan bien, es decir, la función

$$u(t) := u^N(t), \qquad \text{si } t \in I_N$$

está bien definida y es solución del problema. Y, finalmente, el hecho de que $\alpha \leq u \leq \beta$ prueba que $\lim_{|t|\to\infty} u(t) = 0$.

3 Nos fuimos por la tangente

Vamos a ver ahora otro método iterativo para encontrar soluciones de un problema de la forma $Lu = N(u)$, que por medio de nuestros habituales trucos podemos escribir como una ecuación $F(u) = 0$, en algún espacio de Banach. En realidad, no se trata de otra cosa que el conocidísimo método de Newton para funciones en $\mathbb{R}$: a partir de una primera aproximación, trazamos la tangente al gráfico de F y buscamos el punto donde corta al eje x, y así sucesivamente. Como la recta tangente en el punto $(u_n, F(u_n)$ está dada por $y = F'(u_n)(x - u_n) + F(u_n)$, la iteración se define por

$$u_{n+1} := u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)}.$$

Esto requiere, en primer lugar, estar situados en una región en la que F' no se anula; aún así, sabemos que nuestra sucesión puede rumbear para el lado de los tomates. Para evitar una situación tan deshonrosa, se suele poner alguna hipótesis que garantice la convergencia: sin entrar en detalles, uno puede recordar vagamente que si la derivada segunda de F está acotada y uno empieza bastante cerca de u_0, entonces el método anda muy bien. Es claro que si el límite de $\{u_n\}$ existe, entonces se trata de un cero de F. Pero además la convergencia es rápida: no es lineal, como la de Picard, sino cuadrática. La razón de esto es bastante clara, ya que estamos linealizando el problema, es decir, tomando el polinomio de Taylor de orden 1. Y así las cosas, la cuestión es que este método se puede extender para una ecuación en un espacio de Banach: es claro que ya no tenemos rectas tangentes pero sí Taylor:

$$F(y) = F(x) + DF(x)(y - x) + R(x),$$

lo cual nos motiva a definir u_{n+1} a partir de la igualdad

$$F(u_n) + DF(u_n)(u_{n+1} - u_n) = 0,$$

que, si $DF(u_n)$ es inversible, es la iteración de Newton:

$$u_{n+1} = u_n - DF(u_n)^{-1}(F(u_n)).$$

Como es de esperar, no podremos decir mucho sobre la convergencia si no tenemos una buena expresión para el resto de Taylor. Esto puede hacerse directamente para F de clase C^1, aunque para hacerlo más fácil vamos a suponer que es C^2.

Lema 3.1 *Sean X, Y espacios de Banach, $A \subset X$ un abierto y $F : A \to Y$ de clase C^2. Si $[x, y] \subset A$, entonces*

$$\|F(y) - F(x) - DF(x)(y - x)\| \leq \frac{M}{2}\|y - x\|^2$$

donde

$$M := \max_{z \in [x,y]} \|D^2(z)\|.$$

Demostración:

Si $G(y) = F(y) - F(x) - DF(x)(y - x)$, entonces $G(x) = 0$ y

$$\|DG(z)\| = \|DF(z) - DF(x)\| \leq M\|z - x\|$$

para todo $z \in [x, y]$. Si escribimos $\varphi(t) = G(x + t(y - x))$, lo anterior dice que $\|\varphi'(t)\| \leq Mt\|y - x\|^2$ para todo $t \in [0, 1]$. Es claro que no podemos integrar la derivada de φ porque estamos en un Banach, aunque parece razonable pensar que el camino más corto entre dos puntos es la recta:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \int_0^1 \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Para ver esto, alcanza con observar que si $\{0 = t_0 < \ldots < t_N = 1\}$ es una partición, entonces

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \|\varphi'(t)\|\, |t_{j+1} - t_j|,$$

que converge a la integral cuando la norma de la partición tiende a 0. En consecuencia,

$$\|F(y) - F(x) - DF(x)(y - x)\| \leq \int_0^1 Mt\|y - x\|^2\, dt = \frac{M}{2}\|y - x\|^2.$$

□

Observación 3.2 *En la cuenta para acotar $\|\varphi(1) - \varphi(0)\|$ usamos el teorema de valor medio; sin embargo, se puede probar de manera directa y usarlo justamente para probar el teorema de valor medio.*

Con esto alcanza para tener una primera versión (algo tosca) del método de Newton. Supongamos para empezar que $DF(u)$ es un isomorfismo y además $\|D^2F(u)\| \leq M$ para todo u. En ese caso, la iteración de Newton está bien definida y vale

$$F(u_n) = F(u_n) - F(u_{n-1}) - DF(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})$$

y entonces

$$\|F(u_n)\| \leq \frac{M}{2}\|u_n - u_{n-1}\|^2.$$

Por otra parte, escribiendo $u_{n+1} - u_n = DF(u_n)^{-1}(F(u_n))$ se obtiene

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|DF(u_n)^{-1}\|\|F(u_n)\| \leq \frac{C_n M}{2}\|u_n - u_{n-1}\|^2$$

donde $C_n := \|DF(u_n)^{-1}\|$. De esta forma, si suponemos que $C_n \leq C$ para todo n, la convergencia cuadrática está garantizada, siempre que la distancia inicial $\|u_1 - u_0\|$ sea suficientemente chica. Más precisamente, por inducción se ve que

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \left(\frac{CM}{2}\right)^{2^n - 1} \|u_1 - u_0\|^{2^n},$$

es decir:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq A^{2^n - 1}\|u_1 - u_0\|,$$

donde $A = \frac{CM\|u_1 - u_0\|}{2}$. Basta pedir entonces $A < 1$, lo que se traduce en una condición explícita a partir del hecho de que

$$\|u_1 - u_0\| \leq \|DF(u_0)^{-1}\|\|F(u_0)\| \leq C\|F(u_0)\|.$$

Proposición 3.1 *En la situación anterior, si si $MC^2\|F(u_0)\| < 2$ entonces la sucesión converge cuadráticamente a una solución.*

A modo de ejemplo, consideremos otra vez el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

y tomemos

$$X := \{u \in C^2[0, T] : u(0) = u(T) = 0\}$$

y $F : X \to C[0, T]$ dada por

$$F(u) := u'' - f(\cdot, u).$$

La diferencial está dada por $DF(u)(\varphi) = \varphi'' - \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u)\varphi$, que es inversible por ejemplo si $\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u) \geq -c$, donde $c < \frac{\pi}{T}$. Para hacerlo más fácil, vamos a suponer que f es creciente respecto de u, es decir, $c = 0$. Para este caso ya conocemos la norma de la inversa de DF, aunque tal vez no nos hayamos dado cuenta: es la acotación que usamos tantas veces, que incluye el truquito de integrar por partes

$$-\int_0^T DF(u)(\varphi)(t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T [\varphi'(t)^2 + c\varphi(t)^2]\, dt \geq \|\varphi'\|_{L^2}^2,$$

de donde

$$\|\varphi'\|_{L^2}^2 \leq \|DF(u)(\varphi)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}$$

y por Poincaré

$$\|\varphi'\|_{L^2} \leq \frac{T}{\pi}\|DF(u)(\varphi)\|_{L^2}.$$

Tal vez alguien se acuerde ahora de que, como φ se anula en ambos extremos, vale

$$\|\varphi\|_\infty \leq \frac{T^{1/2}}{2}\|\varphi'\|_{L^2},$$

lo que da una cota inferior para $DF(u)$:

$$\|\varphi\|_\infty \leq \frac{T^{3/2}}{2\pi}\|DF(u)(\varphi)\|_{L^2} \leq \frac{T^2}{2\pi}\|DF(u)(\varphi)\|_\infty,$$

es decir:

$$\|DF(u)\| \leq \frac{T^2}{2\pi}.$$

Observemos también que

$$DF(u+\varphi)(\psi) - DF(u)(\psi) = -\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u+\varphi) - \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u)\right)\psi$$

y, en consecuencia,

$$\|D^2F(u)\| \leq \|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\cdot, u)\|_\infty.$$

De esta forma, si las derivadas segundas de f están acotadas entonces el método de Newton converge a la (única) solución del problema, siempre que hayamos empezado cerca de ella. A uno le interesaría quizás saber qué forma concreta toma la iteración en este caso, ya que la expresión $u_{n+1} = u_n - DF(u_n)^{-1}(F(u_n))$ no parece muy amigable. Pero escribiendo $DF(u_n)(u_{n+1} - u_n) = -F(u_n)$, la cosa mejora: se trata de resolver el problema de Dirichlet para la ecuación

$$(u_{n+1} - u_n)''(t) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_n(t))(u_{n+1} - u_n)(t) = -u_n''(t) + f(t, u_n(t)),$$

es decir:

$$u_{n+1}''(t) = f(t, u_n(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_n(t))[u_{n+1}(t) - u_n(t)].$$

Lo que quedó tiene toda la lógica del mundo: en la ecuación original reemplazamos f por su desarrollo de Taylor de orden 1 que, cuando ya andamos cerca la solución, debería parecerse a $f(t, u_{n+1}(t))$. La ventaja es que en cada paso estamos resolviendo un problema lineal, que es más cómodo escribir así:

$$u_{n+1}''(t) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_n(t))u_{n+1}(t) = f(t, u_n(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_n(t))u_n(t)$$

A partir del ejemplo, se puede objetar que el método es demasiado restrictivo, aunque es claro que las condiciones pueden mejorarse. Sin entrar en detalles, en el ejemplo anterior se pueden aplicar todas esas cosas que venimos diciendo desde el shooting querido de aquellos tiempos: por ejemplo, hay cotas a priori que permiten truncar, así que lo de las derivadas segundas acotadas se resuelve en un periquete. De todas formas, hace falta saber aproximadamente por dónde anda la solución porque, en caso contrario, puede ocurrir como dice el tango: de ese cero para siempre te vas alejando.

Ejercicio: Sea F de clase C^2 definida en $B_R(u_0)$, con $DF(u_0)$ inversible y $\|D^2F(u)\| \leq M$ para todo u. Sean

$$C_0 := \|DF(u_0)^{-1}\|, \qquad \alpha_0 := \|DF(u_0)^{-1}(F(u_0))\|$$

y supongamos que $\alpha_0 < \frac{R}{2}$ y $C_0 M \alpha_0 < \frac{1}{2}$. Probar que el método de Newton converge cuadráticamente a un cero de F.

También existen formas de relajar las hipótesis recurriendo a otra de nuestras grandes amigas: la homotopía. El método llamado de Newton-continuación consiste en definir una familia de problemas (no confundir con los problemas de familia) de la forma

$$F_\lambda(u) := F(u, \lambda) = 0,$$

de manera tal que $F_1 = F$ y conozcamos alguna solución u_0 para F_0. Si F es de clase C^2 y $D_u F_0(u_0)$ es inversible, el método de Newton permite construir una solución u_1 para $\lambda = \varepsilon_1$ suficientemente chico. La explicación es sencilla: por empezar, podemos fijar $R, \varepsilon > 0$ y una constante M tales que $DF_\lambda(u_0)$ es inversible y $\|D_u^2 F_\lambda(u)\| \leq M$ en $B_R(u_0)$ para $\lambda < \varepsilon$ (continuidad, que le dicen). Si ahora definimos

$$C_\lambda := \|DF_\lambda(u_0)^{-1}\|, \qquad \alpha_0 := \|DF_\lambda(u_0)^{-1}(F_\lambda(u_0))\|,$$

entonces se cumplen las condiciones del ejercicio anterior para λ chico. Con un poco de suerte, de esta forma se puede obtener una sucesión $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \ldots < \varepsilon_N = 1$. ¿Un ejemplo? El problema anterior, con f creciente. Si ponemos

$$F(u, \lambda) = u'' - \lambda f(\cdot, u),$$

el método funciona bien, arrancando en la solución trivial.

Para terminar, podemos mencionar el método llamado de cuasi-linealización, que combina la técnica de Newton con la de super y subsoluciones. Por ejemplo para el problema anterior, si además tenemos una sub y una super ordenadas, entonces se define la función de truncamiento T y eligiendo $\lambda > 0$ tal que $\lambda \geq \frac{\partial f}{\partial u}$ para valores de u entre α y β se define el problema cuasi-lineal

$$u''(t) - \lambda u(t) = f(t, \alpha(t)) - \lambda T(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \alpha(t))[T(t, u(t)) - \alpha(t)]$$

Bajo hipótesis adecuadas se ve que la solución está entre α y β, así que

$$u''(t) = f(t, \alpha(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \alpha(t))[u(t) - \alpha(t)].$$

Esto significa que en realidad u es lo que se obtiene a partir del método de Newton aunque esto, claro, lo sabemos *a posteriori.* Por último, se prueba que u es subsolución del problema original y todo recomienza. En definitiva, las famosas “hipótesis adecuadas” permiten ver que la iteración de Newton que comienza en α (o en β) converge cuadráticamente a una solución del problema.

References

[1]